

Application de la déquantification de Maslov pour l'étude des systèmes à événements discrets

Guilherme Espindola-Winck¹, Laurent Hardouin², Mehdi Lhommeau² et Benoît Trouillet¹

¹ Univ. Lille, CNRS, Centrale Lille, UMR 9189 CRISTAL, Lille, F-59000, France
{guilherme.espindola,benoit.trouillet}@centralelille.fr

² Univ. Angers, LARIS, SFR MATHSTIC, Angers, F-49000, France
{laurent.hardouin,mehdi.lhommeau}@univ-angers.fr

Résumé

Ce travail s'appuie sur une régularisation des systèmes dynamiques max-plus, dont l'objectif est de permettre l'interprétation de leurs trajectoires comme des limites de trajectoires de systèmes classiques à coefficients positifs. L'idée centrale repose sur la **déquantification de Maslov**, qui établit un lien entre l'algèbre max-plus – classiquement utilisée pour modéliser les SED avec retards et synchronisations – et une famille de semi-anneaux non idempotents notés $\mathbb{S}_h = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$, où l'addition est définie par $a \oplus b = h \times \log(\exp(a/h) + \exp(b/h))$.

Quand le paramètre $h \rightarrow 0$, on retrouve le semi-anneau max-plus. Pour $h > 0$, tous les \mathbb{S}_h sont isomorphes au semi-anneau des réels positifs \mathbb{R}_+ , ce qui permet de reformuler un SED comme un **système dynamique à temps discret classique** dans \mathbb{R}_+ . Cette reformulation permet notamment d'envisager des simulations ou des analyses en dehors du cadre idempotent.

Nous illustrons cette approche par la simulation d'un système max-plus linéaire dans \mathbb{S}_1 , en utilisant une projection et une mise à l'échelle adaptée. Nous mettons en évidence la nécessité de la **stabilité** du système pour garantir la validité de la simulation : une accumulation excessive de jetons dans le **Graphe d'Événements Temporisés (GET)** induit en effet une instabilité numérique. Une stabilisation par retour d'état, analogue à la **bornitude dans les réseaux de Petri**, permet de garantir une simulation fidèle.

Ces résultats ouvrent la voie à une **modélisation unifiée** entre systèmes discrets et continus, et à une meilleure intégration des SED dans des environnements de simulation classiques.

Table des matières

1	Introduction	2
2	Les préliminaires mathématiques	3
2.1	Semi-anneaux	3
2.2	La déquantification de Maslov des nombres réels : la famille de semi-anneaux $\{\mathbb{S}_h\}_{h \geq 0}$	3
2.3	Matrices dont les éléments appartiennent à \mathbb{S}_1	5
2.3.1	L'erreur d'approximation entre \mathbb{S}_0 et \mathbb{S}_1	5
2.4	Projection de \mathbb{S}_1 sur \mathbb{Z}	6
2.4.1	Propriétés de la projection	7
2.5	Stabilité numérique des opérations dans \mathbb{S}_1	8
2.5.1	Cohérence structurelle	8
3	Graphes d'Événements Temporisés (GET)	9
3.1	GET dans \mathbb{S}_0	9
3.2	GET en utilisant un cadre de dynamique classique	10

4 Exemples d'applications	12
4.1 Modélisation et forme canonique	12
4.2 Simulation	14
5 Conclusion	15

1 Introduction

Les systèmes max-plus linéaires. Les **Systèmes à Événements Discrets (SED)** sont des systèmes dont la dynamique est pilotée par des événements, c'est-à-dire que l'évolution de l'état dépend entièrement de l'occurrence d'événements discrets asynchrones dans le temps. Les systèmes de fabrication, les réseaux de télécommunications, les réseaux de transport, sont des exemples de SED [4]. Ces systèmes sont souvent difficiles à décrire à l'aide des équations physiques traditionnelles, couramment utilisées par les ingénieurs en automatique. Par conséquent, des cadres théoriques alternatifs sont employés pour décrire leur comportement, notamment les langages et automates, les chaînes de Markov, et les réseaux de Petri. Pour une vue d'ensemble complète, les lecteurs peuvent se référer à [7].

Une sous-classe particulière des SED, caractérisée par des phénomènes de **synchronisation** et de **délai**, peut être modélisée à l'aide des opérations max et +. Bien que ces systèmes soient intrinsèquement non linéaires, ils présentent une forme de linéarité lorsqu'ils sont considérés sur des **semi-anneaux idempotents**, également appelés dioïdes. Les systèmes max-plus peuvent être représentés graphiquement à l'aide de **Graphes d'Événements Temporisés (GET)**. Un GET est un **réseau de Petri temporisé** dans lequel chaque place est reliée à une **unique transition amont et une unique transition aval**.

La commande et l'estimation d'état des systèmes max-plus linéaires. En tirant parti de la propriété de linéarité sur les dioïdes, plusieurs méthodes ont été développées pour contrôler/piloter et estimer les états de tels systèmes. Les problèmes de commande sont traités de manière similaire à la théorie classique du contrôle. Parmi les problèmes résolus, on peut citer le contrôle optimal [19], la commande prédictive [22] et la conception de contrôleurs robustes [15, 23]. La connaissance des états du système est un point clé dans la conception de commande et la détection de défauts. Le problème d'observation consiste à estimer ces états. Pour cette raison, le développement de méthodes permettant d'observer les états du système présente un grand intérêt. Dans [18], un observateur dynamique est proposé pour ces systèmes ; dans [13, 12], un observateur inspiré de Luenberger est développé.

Les GET régularisés. De nombreux problèmes de commande et d'estimation mentionnés dans la vaste littérature sur ce sujet de recherche sont résolus à l'aide de la *théorie de la résiduation* [6]. Contrairement à ces travaux, le but de cet article est de faire un premier pas vers l'application des outils classiques de commande bien connus par les automaticiens.

En résumé, la contribution de cet article repose sur l'utilisation de la **déquantification de Maslov** des nombres réels [16, 17] afin de définir un isomorphisme de semi-anneaux entre le **log-semi-anneau** et l'algèbre standard sur les réels positifs. Cette idée originale nous permet de représenter et simuler les GET en utilisant un cadre de dynamique classique. Nous analysons également numériquement les problèmes sous-jacents de dépassement et de sous-dépassement numérique (*overflow* et *underflow*). La manière de stabiliser les calculs numériques qui sera expliquée dans ce travail est assez classique. Elle a été employée notamment dans l'étude de la méthode de Graeffe dans [20]. Dans [3], les auteurs ont étudié les jeux d'entropie qui sont précisément une version déquantisée des jeux à paiement moyen, c-à-d une version à deux joueurs des GET. Les log-semi-anneaux sont aussi utilisés dans l'étude de la régularisation

entropique du transport optimal, par exemple dans [5].

Organisation. Les préliminaires mathématiques relatifs à ces résultats sont présentés dans la Section 2. Dans la Section 3, nous montrons comment le processus de déquantification de Maslov permet de définir une représentation équivalente des SED max-plus en tant que systèmes pilotés par le temps, discrets et invariants dans le temps. Dans la Section 4, nous présentons des exemples numériques de petite taille illustrant la validité de l'approche. Dans cette section, nous analysons également la déquantisation du problème spectral pour calculer la forme canonique des systèmes avec une partie implicite, qui a été particulièrement étudiée avec des motivations issues de la physique statistique dans [8, 1, 2]. Enfin, la Section 5 conclut l'article et propose quelques perspectives de recherche.

2 Les préliminaires mathématiques

2.1 Semi-anneaux

Un **semi-anneau**¹ \mathcal{S} est une structure algébrique dotée de deux opérations internes notées \oplus et \otimes . L'opération \oplus est associative et commutative. L'opération \otimes est associative (mais pas nécessairement commutative) et distributive à gauche et à droite par rapport à \oplus .

Les éléments neutres respectifs de \oplus et \otimes sont notés ε et e . L'élément ε est absorbant pour l'opération \otimes ($\forall a \in \mathcal{S}, \varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon$). De plus, on a $a^{\otimes i} = a \otimes a^{\otimes i-1}$ et $a^{\otimes 0} = e$. Par ailleurs, \mathcal{S} est une notation abrégée pour désigner $(\mathcal{S}, \oplus, \otimes, \varepsilon, e)$.

Un semi-anneau \mathcal{S} est dit **idempotent**, ou *diïde*, si $a \oplus a = a$ pour tout $a \in \mathcal{S}$. Les diïdes peuvent être munis d'un ordre partiel naturel induit par l'addition idempotente, défini par

$$a \succeq b \iff a = a \oplus b.$$

Ainsi, un diïde \mathcal{S} est un ensemble partiellement ordonné (ou *poset*). Pour une présentation complète, voir [4, 14].

Exemple 1. L'ensemble $\mathbb{R}_{\max} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +, -\infty, 0)$, muni de l'opérateur \max comme \oplus et de la somme classique $+$ comme \otimes , constitue un semi-anneau idempotent, avec $\varepsilon = -\infty$ et $e = 0$. Les opérations matricielles sont analogues à celles de l'algèbre linéaire, en remplaçant les opérations usuelles $+$ et \times par \oplus et \otimes , respectivement.

D'autres semi-anneaux sont isomorphes à \mathbb{R}_{\max} , par exemple :

Exemple 2. Le semi-anneau $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +, +\infty, 0)$ est isomorphe à \mathbb{R}_{\max} par la bijection $x \mapsto -x$.

Exemple 3. Le semi-anneau $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \max, \times, 0, 1)$ est isomorphe à \mathbb{R}_{\max} , où $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ désigne l'ensemble des nombres réels non négatifs, par la bijection $x \mapsto \exp(x)$.

2.2 La déquantification de Maslov des nombres réels : la famille de semi-anneaux $\{\mathbb{S}_h\}_{h \geq 0}$

La **déquantification de Maslov** (voir [16, 17]) est une famille de semi-anneaux $\{\mathbb{S}_h\}_{h \geq 0}$, appelés ici **log-semi-anneaux**, tels que chaque \mathbb{S}_h est l'ensemble des nombres réels muni des opérations de semi-anneau, c'est-à-dire :

$$\mathbb{S}_h = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes, -\infty, 0)$$

1. Un semi-anneau est une structure algébrique similaire à un anneau, mais sans élément inverse pour l'addition (c'est-à-dire sans soustraction).

défini comme suit :

$$a \oplus b = h \times \log \left(\exp \left(\frac{a}{h} \right) + \exp \left(\frac{b}{h} \right) \right) = \Phi_h^{-1}(\Phi_h(a) + \Phi_h(b)) \text{ et}$$

$$a \otimes b = a + b = \Phi_h^{-1}(\Phi_h(a) \times \Phi_h(b))$$

avec $\Phi_h : x \mapsto \exp \left(\frac{x}{h} \right)$.

Exemple 4. Dans la Figure 1, on présente une droite dans \mathbb{R}_{\max} et son approximation dans \mathbb{S}_h .

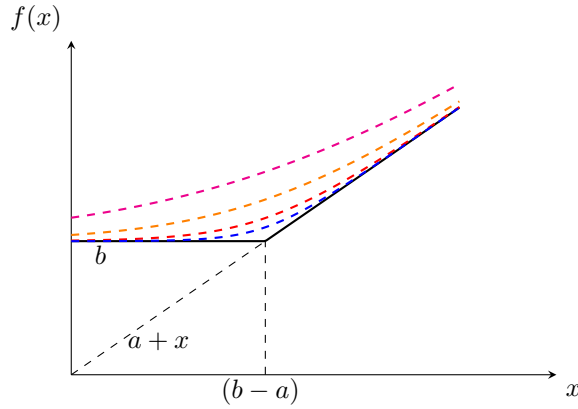


FIGURE 1 – Une droite dans \mathbb{R}_{\max} et ses approximations pour différentes valeurs de h : $f(x) = \max(a+x, b)$ et $\tilde{f}(x) = h \times \log \left(\exp \left(\frac{a+x}{h} \right) + \exp \left(\frac{b}{h} \right) \right)$

Sans perte de généralité, supposons que $a \geq b$. Alors :

$$a \oplus b = a + h \times \log \left(1 + \exp \left(\frac{b-a}{h} \right) \right) \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0} a \oplus b = \max(a, b) = a,$$

ce qui définit ainsi \mathbb{S}_0 . Les opérations binaires de \mathbb{S}_0 seront représentées par \boxplus et \boxtimes .

En appliquant la terminologie de la quantification à cette *déformation algébrique*, on qualifie alors \mathbb{S}_0 , **la copie de \mathbb{R}_{\max} , d'objet classique**, tandis que la famille $\{\mathbb{S}_h\}_{h>0}$ **constitue des objets quantiques**.

Chacun des semi-anneaux \mathbb{S}_h est isomorphe au semi-anneau $(\mathbb{R}_+, +, \times)$ muni de l'addition et de la multiplication usuelles. Cet isomorphisme est permis via la bijection $x \mapsto \Phi_h(x)$ de \mathbb{S}_h vers \mathbb{R}_+ . Donc $\forall a, b \in \mathbb{S}_h$:

$$\Phi_h(a \oplus b) = \Phi_h(\Phi_h^{-1}(\Phi_h(a) + \Phi_h(b))) = \Phi_h(a) + \Phi_h(b), \text{ morphisme additif,}$$

$$\Phi_h(a \otimes b) = \Phi_h(\Phi_h^{-1}(\Phi_h(a) \times \Phi_h(b))) = \Phi_h(a) \times \Phi_h(b), \text{ morphisme multiplicatif,}$$

alors Φ_h est un homomorphisme de \mathbb{S}_h sur \mathbb{R}_+ , et comme il s'agit d'une bijection, c'est donc un isomorphisme.

Remarque 1. Les semi-anneaux \mathbb{S}_h ne sont pas idempotents puisque $a \oplus a = a + h \times \log(2)$.

Dans la suite de l'article, nous considérons $h = 1$, c'est-à-dire le semi-anneau \mathbb{S}_1 : $a \oplus b = \log(\exp(a) + \exp(b))$, ceci sans perte de généralité.

2.3 Matrices dont les éléments appartiennent à \mathbb{S}_1

Le produit cartésien n -fois du semi-anneau \mathbb{S}_1 est défini de manière analogue au produit cartésien des nombres réels, c'est-à-dire :

$$\mathbb{S}_1^n = \underbrace{\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1 \times \cdots \times \mathbb{S}_1}_{n\text{-fois}} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{S}_1\}.$$

Si $a, b \in \mathbb{S}_1^n$, alors

$$\log(\exp(a)^\top \times \exp(b)) = \log\left(\sum_{i=1}^n \exp(a_i + b_i)\right) = \bigoplus_{i=1}^n a_i \otimes b_i = a^\top \otimes b,$$

où $\exp(a) = (\exp(a_1), \dots, \exp(a_n))^\top$ et $\exp(b) = (\exp(b_1), \dots, \exp(b_n))^\top$, c'est-à-dire les exponentielles appliquées élément par élément aux vecteurs a et b , respectivement.

Ainsi, pour des matrices A, B, C de tailles respectives $m \times n$, $n \times p$ et $m \times p$, avec des éléments dans \mathbb{S}_1 , on a

$$c_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n a_{ik} \otimes b_{kj} = \log\left(\sum_{k=1}^n \exp(a_{ik} + b_{kj})\right),$$

ou de manière équivalente,

$$C = A \otimes B = \log(\exp(A) \times \exp(B)),$$

où

$$\exp(A) = (\exp(a_{ij}))_{(i,j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}}, \quad \exp(B) = (\exp(b_{ij}))_{(i,j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}},$$

c'est-à-dire les exponentielles appliquées élément par élément à A et B , ce qui diffère de l'exponentielle matricielle.

Il est trivial de montrer que pour deux matrices A et B de même taille $n \times m$, on a

$$c_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} = \log(\exp(a_{ij}) + \exp(b_{ij})),$$

pour $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$, ou de manière équivalente,

$$C = A \oplus B = \log(\exp(A) + \exp(B)),$$

avec $\exp(A)$ et $\exp(B)$ les exponentielles appliquées élément par élément à A et B , respectivement.

2.3.1 L'erreur d'approximation entre \mathbb{S}_0 et \mathbb{S}_1

Rappelons-nous que la norme-sup (ou norme- ∞) d'un vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ est donnée par

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1}^n |x_i|.$$

Le produit

$$z_i = (A \boxtimes x)_i = \max_{j=1}^n (a_{ij} + x_j), \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

avec $a_{ij} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $x_j \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ pour $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ est toujours non-expansif dans la norme-sup, c-à-d

$$\|A \boxtimes x - A \boxtimes y\|_\infty \leq \|x - y\|_\infty.$$

car pour chaque composante i :

$$|(A \boxtimes x)_i - (A \boxtimes y)_i| = \left| \max_{j=1}^n (a_{ij} + x_j) - \max_{j=1}^n (a_{ij} + y_j) \right|.$$

Or, pour tout ensemble de réels u_j, v_j , on a la propriété élémentaire suivante :

$$\left| \max_j (u_j) - \max_j (v_j) \right| \leq \max_j (|u_j - v_j|).$$

En appliquant ceci à $u_j = a_{ij} + x_j$ et $v_j = a_{ij} + y_j$, on obtient :

$$|(A \boxtimes x)_i - (A \boxtimes y)_i| \leq \max_{j=1}^n |(a_{ij} + x_j) - (a_{ij} + y_j)| = \max_{j=1}^n |x_j - y_j|.$$

En prenant le maximum sur toutes les composantes i (calcul de la norme-sup), on a donc :

$$\|A \boxtimes x - A \boxtimes y\|_\infty = \max_{i=1}^n |(A \boxtimes x)_i - (A \boxtimes y)_i| \leq \max_j |x_j - y_j| = \|x - y\|_\infty.$$

Ce qui prouve que $x \mapsto A \boxtimes x$ est non-expansif dans la norme-sup.

L'inégalité ci-dessous²

$$\underbrace{\max(x_1, \dots, x_n)}_{=x_1 \boxplus \dots \boxplus x_n} \leq \underbrace{\log(\exp(x_1) + \dots + \exp(x_n))}_{=x_1 \oplus \dots \oplus x_n} \leq \log(n) + \underbrace{\max(x_1, \dots, x_n)}_{=x_1 \boxplus \dots \boxplus x_n} \quad (1)$$

avec le caractère non-expansif de $x \mapsto A \boxtimes x$ mentionné ci-dessus, permet de contrôler l'erreur d'approximation entre \mathbb{S}_0 (la copie de \mathbb{R}_{\max}) et \mathbb{S}_1 . Cette inégalité est utilisée par exemple dans [24].

2.4 Projection de \mathbb{S}_1 sur \mathbb{Z}

Considérons maintenant la projection suivante de \mathbb{S}_1 sur l'ensemble des entiers \mathbb{Z} .

Définition 1 (Projecteur $\mathfrak{P}(\mathbb{S}_1)$). *Soit*

$$\mathfrak{P} : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1^\sharp : x \mapsto \lfloor x \rfloor,$$

une application de \mathbb{S}_1 vers $\mathbb{S}_1^\sharp = (\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes, -\infty, 0)$ telle que $\mathbb{S}_1^\sharp \subset \mathbb{S}_1$, où $\lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}$ est la fonction partie entière qui renvoie le plus grand entier inférieur ou égal à x . La fonction \mathfrak{P} est appelée **projecteur** car elle satisfait :

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(x)) = \mathfrak{P}(x), \quad \forall x \in \mathbb{S}_1.$$

En pratique, il semble possible de retrouver x à partir de $\mathfrak{P}(x)$ via l'expression $\mathfrak{P}(x) + \{x\}$, où $\{x\}$ désigne la partie fractionnaire de x . Cependant, $\mathfrak{P}(x)$ peut être n'importe quel entier tandis que $\{x\} \in [0, 1[$. Par conséquent, aucune inverse ne peut être définie.

Pour que la projection du **log-semi-anneau** \mathbb{S}_1 reste un semi-anneau, elle doit préserver tous les axiomes énoncés dans la Sous-Section 2.1. Cette preuve est triviale et ne sera donc pas abordée dans cet article.

2. Un exemple permettant de mieux comprendre cette inégalité consiste à considérer le cas où $x_1 \boxplus x_2 = x_1$ (sans perte de généralité), et $x_1 \oplus x_2 = x_1 + \log(1 + \exp(x_2 - x_1))$. Comme $x_2 - x_1 \leq 0$, on a $0 \leq \log(1 + \exp(x_2 - x_1)) \leq \log(2)$, et en ajoutant x_1 , on obtient $x_1 \leq x_1 \oplus x_2 \leq x_1 + \log(2)$.

2.4.1 Propriétés de la projection

Proposition 1. Soit $f(x) = \lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}$ la fonction partie entière, et soient $a, b \in \mathbb{S}_1$. Alors :

$$\lfloor a \oplus b \rfloor = \max(a, b).$$

Démonstration. Supposons sans perte de généralité que $a \geq b$ et rappelons-nous de l'inégalité (1). Alors :

$$a \leq a \oplus b \leq \log(2) + a,$$

Puisque $\log(2) < 1$, on a :

$$\lfloor a \oplus b \rfloor = \lfloor a \rfloor.$$

Or $a \geq b \Rightarrow \max(a, b) = a$, donc :

$$\lfloor a \oplus b \rfloor = \lfloor \max(a, b) \rfloor.$$

La preuve pour $b > a$ est identique par symétrie. □

Analysons maintenant la propriété d'idempotence de la projection de \mathbb{S}_1 .

Proposition 2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Si la partie fractionnaire de a vérifie

$$\{a\} < 1 - \log(2),$$

alors

$$\lfloor a \oplus a \rfloor = \lfloor a \rfloor,$$

où $a \oplus a = \log(\exp(a) + \exp(a)) = a + \log(2)$.

Démonstration. Soit $a = \lfloor a \rfloor + \{a\}$, avec $\{a\} \in [0, 1[$. Par définition, on a :

$$a \oplus a = \log(\exp(a) + \exp(a)) = a + \log(2) = \lfloor a \rfloor + \{a\} + \log(2)$$

On en déduit que :

$$\lfloor a \oplus a \rfloor = \lfloor a \rfloor.$$

Est équivalent à imposer que :

$$\{a\} + \log(2) < 1 \iff \{a\} < 1 - \log(2).$$

C'est exactement l'hypothèse de la proposition. □

Exemple 5. Prenons $a = 3.2$. Sachant que $\log(2) \approx 0.6931$, alors :

- $\{a\} = 0.2$;
- $a + \log(2) \approx 3.2 + 0.6931 \approx 3.8931$;
- $\lfloor a + \log(2) \rfloor = \lfloor 3.8931 \rfloor = 3$;
- $\lfloor a \rfloor = \lfloor 3.2 \rfloor = 3$.

Donc, $\lfloor a + \log(2) \rfloor = \lfloor a \rfloor$.

Prenons $a = 3.8$. Alors :

- $\{a\} = 0.8$
- $a + \log(2) \approx 3.8 + 0.6931 \approx 4.4931$
- $\lfloor a + \log(2) \rfloor = \lfloor 4.4931 \rfloor = 4$
- $\lfloor a \rfloor = \lfloor 3.8 \rfloor = 3$

Donc, $\lfloor a + \log(2) \rfloor \neq \lfloor a \rfloor$, car la condition de la Proposition 2 n'est pas vérifiée.

2.5 Stabilité numérique des opérations dans \mathbb{S}_1

Le calcul de l'exponentielle est très sensible et peut fréquemment conduire à un **dépassement numérique**. Une technique astucieuse pour contourner ce problème est de décaler les arguments de \mathbb{S}_1 . Par exemple, pour $f(x, y) = x \oplus y$, on peut définir $\delta = -c$ où $c = \max(x, y)$. On obtient alors :

$$-c + f(x, y) = -c + \log(\exp(x) + \exp(y)) = \log(\exp(x - c) + \exp(y - c)),$$

d'où

$$f(x, y) = c + \log(\exp(x - c) + \exp(y - c)).$$

Par exemple, pour $c = x$, on obtient

$$x + \log(1 + \exp(y - x)).$$

Ainsi, le dépassement numérique est évité. Lorsque $y - x \ll 0$, la quantité $\exp(y - x)$ décroît exponentiellement vers zéro. Dans ce cas, on retourne $x + \log(1) = x$, c'est-à-dire la valeur de c .

En résumé, un δ suffisamment grand en valeur absolue permet d'éviter le dépassement numérique, ce qui est le principal enjeu en pratique.

2.5.1 Cohérence structurelle

Il convient d'examiner si l'opération de décalage définie sur \mathbb{S}_1 préserve la structure algébrique, en particulier la compatibilité avec l'isomorphisme $\Phi_1 : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{R}_+$ introduit précédemment. Autrement dit, on s'intéresse à la stabilité structurelle de la transformation :

$$\Omega_1 = \delta \circ \Phi_1$$

où δ désigne une translation additive dans \mathbb{S}_1 .

On s'intéresse ici à la préservation de la structure algébrique du semi-anneau \mathbb{S}_1 lors de l'introduction d'un décalage numérique destiné à prévenir les dépassements. Plus précisément, on considère la composition :

$$\Omega_1 = \Delta \circ \Phi_1 : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad x \mapsto \exp(x + \delta)$$

où $\delta \in \mathbb{R}$ est un paramètre de décalage, et $\Delta = \exp(\delta) \in \mathbb{R}_+$ est le facteur d'échelle associé.

L'application Ω_1 définit un morphisme additif sur \mathbb{S}_1 , c'est-à-dire :

$$\Omega_1(a \oplus b) = \Delta \times \Phi_1(a \oplus b) = \Delta \times (\Phi_1(a) + \Phi_1(b)) = \Omega_1(a) + \Omega_1(b), \quad \forall a, b \in \mathbb{S}_1$$

Cela découle directement du fait que Φ_1 est un isomorphisme de semi-anneaux et de la stabilité de l'addition réelle vis-à-vis des translations.

En revanche, la compatibilité multiplicative n'est pas conservée. En effet, pour tout $a, b \in \mathbb{S}_1$:

$$\Omega_1(a \otimes b) = \exp(a + b + \delta) = \Delta \times \exp(a) \times \exp(b) = \Delta \times \Omega_1(a) \times \Omega_1(b)$$

On en conclut que Ω_1 n'est pas un morphisme multiplicatif, mais qu'il induit un biais multiplicatif constant Δ . Ainsi, bien que la structure de semi-anneau ne soit pas strictement préservée, l'effet du décalage reste contrôlable et réversible via un facteur d'échelle global.

3 Graphes d'Événements Temporisés (GET)

Les **Graphes d'Événements Temporisés (GET)** correspondent à la sous-classe des **Réseaux de Petri temporisés** dont **chaque place a une seule transition amont et une seule transition aval**. Le nombre de jetons dans une place s'interprète comme le nombre de ressources disponibles. Par exemple, la machine M_1 a la capacité de traiter deux pièces en parallèle, représentée par deux jetons dans la place p_2 (Figure 2). La place p_1 correspond aux pièces en attente d'être traitées par la machine M_1 . Un jeton dans la place p_3 indique qu'une pièce est en train d'être traitée par la machine. De plus, à chaque place peut-être associée une temporisation permettant de modéliser le temps de séjour que doit passer un jeton avant de pouvoir participer au franchissement de la transition aval. Il existe un autre modèle de GET où on associe une durée à chaque franchissement de transitions. Il a été montré qu'il est toujours possible de se ramener au cas où seules les places sont temporisées [21].

3.1 GET dans \mathbb{S}_0

Dans cette Section, nous allons rappeler la modélisation d'un GET. Pour ce faire, considérons l'exemple ci-dessous :

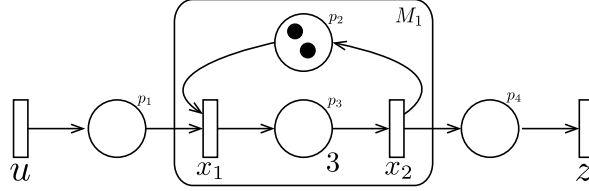


FIGURE 2 – Modélisation d'un système de production composé d'une machine

Dans la suite, nous supposons que seules les places sont temporisées. Tout d'abord nous associons à chaque transition une fonction *dateur* $x_i(k) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$, où $x_i(k)$ désigne la date à laquelle se produit la $k^{\text{ième}}$ activation de la transition i . Ensuite, on considère que le tir des transitions se fait à vitesse maximale (au plus tôt). On obtient alors les équations suivantes :

$$\Sigma : \begin{cases} x_1(k) &= \max(u(k), x_2(k-2)) \\ x_2(k) &= x_1(k) + 3 \\ z(k) &= x_2(k) \end{cases}$$

En introduisant une variable $x_3(k) = x_2(k-1)$, nous obtenons une forme étendue du système précédent :

$$\Sigma^{aug} : \begin{cases} x_1(k) &= \max(u(k), x_3(k-1)) \\ x_2(k) &= x_1(k) + 3 \\ x_3(k) &= x_2(k-1) \\ z(k) &= x_2(k) \end{cases}$$

Ces équations peuvent s'écrire sous forme linéaire dans \mathbb{S}_0 , c'est-à-dire la copie de \mathbb{R}_{\max} :

$$\Sigma^{aug} : \begin{cases} x_1(k) &= u(k) \boxplus x_3(k-1) \\ x_2(k) &= 3 \boxplus x_1(k) \\ x_3(k) &= x_2(k-1) \\ z(k) &= x_2(k) \end{cases}$$

Et plus généralement, on obtient la représentation d'état qui suit :

$$\Sigma^{aug} : \begin{cases} x(k) = A_0 \boxtimes x(k) \boxplus A_1 \boxtimes x(k-1) \boxplus B_0 \boxtimes u(k), \\ z(k) = C \boxtimes x(k), \end{cases} \quad (2)$$

Les vecteurs x , u et z ont des dimensions respectivement égales aux nombres de transitions : internes, d'entrée (commande) et de sortie (mesure).

Dans un GET, le nombre de jetons dans un circuit est invariant au cours de son évolution, quelle que soit la séquence des transitions franchies. Un GET est vivant si et seulement si le marquage de tout circuit est strictement positif. En effet, si le GET a un circuit sans jetons, il résulte que les transitions de ce circuit ne pourront jamais être tirées, il est alors non vivant. La matrice A_0 correspond aux places entre deux transitions internes nommées x_i , et dont les places ne portent pas de jetons dans le marquage initial.

Par ailleurs, on sait que la plus petite solution traduisant le fonctionnement au plus tôt de l'équation $x = A \boxtimes x \oplus b$ est donnée par $x = A^* \boxtimes b$ ³. Finalement, on obtient la forme générale suivante pour le système Σ^{aug} de l'équation (2) :

$$\Sigma^* : \begin{cases} x(k) &= A \boxtimes x(k-1) \boxplus B \boxtimes u(k), \\ z(k) &= C \boxtimes x(k), \end{cases} \quad (3)$$

avec $A = A_0^* \boxtimes A_1$ et $B = A_0^* \boxtimes B_0$. Pour le GET cela signifie que :

1. Toute place située entre deux transitions internes doit contenir exactement un jeton ;
2. Toutes les places situées entre une transition d'entrée et une transition interne doivent être sans jeton ;
3. Toutes les places situées entre une transition interne et une transition de sortie doivent être sans jeton.

Par des manipulations combinatoires tout à fait classiques (en augmentant l'état), on peut toujours faire en sorte qu'un GET vivant vérifie les conditions énoncées précédemment. Donc, tout GET peut s'écrire comme le système Σ^* de l'équation (3).

Dans la suite de cet article, pour des raisons de simplicité et sans perte de généralité, nous ne considérons que des systèmes autonomes :

$$\Pi : \begin{cases} x(k) &= A \boxtimes x(k-1), \\ z(k) &= C \boxtimes x(k), \end{cases} \quad (4)$$

3.2 GET en utilisant un cadre de dynamique classique

Considérons le **système en temps discret et invariant suivant**, défini sur l'espace n -dimensionnel de \mathbb{R}_+ , c'est-à-dire \mathbb{R}_+^n :

$$\tilde{\Pi} : \begin{cases} \tilde{x}(k) = \tilde{A} \times \tilde{x}(k-1), \\ \tilde{z}(k) = \tilde{C} \times \tilde{x}(k), \end{cases} \quad (5)$$

3. L'opérateur $(\bullet)^*$ est appelé l'étoile de Kleene et il est défini par $A^* = E \oplus A \oplus A^{\boxtimes 2} \oplus \dots$ avec E la matrice identité, *i.e.* une matrice carrée de même dimension que A avec la valeur e sur la diagonale principale et ε ailleurs. Si A est telle que $a_{ij} = \varepsilon$ pour tout $i \leq j$, avec $i, j \in \{1, \dots, n\}$, alors on a $(A^{\boxtimes k})_{ij} = \varepsilon$ pour tout $k \geq n$. Par conséquent, $A^* = \bigoplus_{k=0}^{n-1} A^{\boxtimes k}$.

où $\tilde{A} = \exp(A)$, $\tilde{C} = \exp(C)$, $\tilde{x}(0) = \exp(x(0))$ avec A, C et $x(0)$ relatifs au système Π de l'équation (4). Du point de vue pratique, le système $\tilde{\Pi}$ de l'équation (5) et le système Π de l'équation (4) sont reliés comme suit, et pour $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}\tilde{x}(k) &= \tilde{A} \times \left(\tilde{x}(k-1) \times \exp(\delta(k-1)) \right), \\ \tilde{z}(k) &= \tilde{C} \times \left(\tilde{x}(k) \times \exp(\delta(k-1)) \right), \\ \delta(k) &= -\max_{i=1}^n ([\log(\tilde{x}_i(k-1))] - \delta(k-1)) \text{ , "Heuristique".}\end{aligned}$$

où $\delta(k)$ est le facteur d'échelle ou d'atténuation permettant d'éviter le dépassement numérique. Le succès de cette approche dépend fortement d'un choix judicieux de ce facteur. Comme présenté dans la Section 2.5, une valeur inadaptée de $\delta(k)$ peut rendre le cadre dynamique classique inapproprié pour traiter un GET.

Remarque 2. L'introduction de la partie entière dans les équations ci-dessus est réalisée afin d'obtenir une erreur d'approximation "nulle", même lorsqu'une borne d'approximation est connue (d'ailleurs, cette borne permet de contrôler la distance entre la trajectoire d'un GET - celle du système Π défini par l'équation (4) - et la trajectoire "régularisée" - celle du système $\tilde{\Pi}$ défini par l'équation (5) -, pour tout horizon, comme présenté dans la Sous-Section 2.3.1). Cette approche est particulièrement adaptée au formalisme compteur, où les nombres de transitions sont entiers. Dans le formalisme dateur (cas étudié dans ce travail), où la dynamique prend des valeurs réelles, on utilise l'arrondi afin d'obtenir une approximation "parfaite" quand les éléments de A et C du système Π défini par l'équation (4) sont dans $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$.

À partir de cette formulation, on peut conclure que l'état du système $\tilde{x}(k)$ est **quantifié**, c'est-à-dire qu'il appartient à l'**espace exponentiel** avec les opérations matricielles classiques dont les éléments appartiennent à \mathbb{R}_+ .

Pour la récurrence, c'est-à-dire pour pouvoir calculer $\delta(k+1)$, on **déquantifie** l'état du système, à savoir :

$$x(k) = [\log(\tilde{x}(k))] - \delta(k),$$

ce qui représente effectivement l'état du système $x(k)$ dans le semi-anneau \mathbb{S}_0 , copie de \mathbb{R}_{\max} du SED Π associé.

La Figure 3 résume les étapes nécessaires à une bonne utilisation de la déquantification de Maslov pour l'étude d'un GET autonome dans le cadre de la dynamique classique.

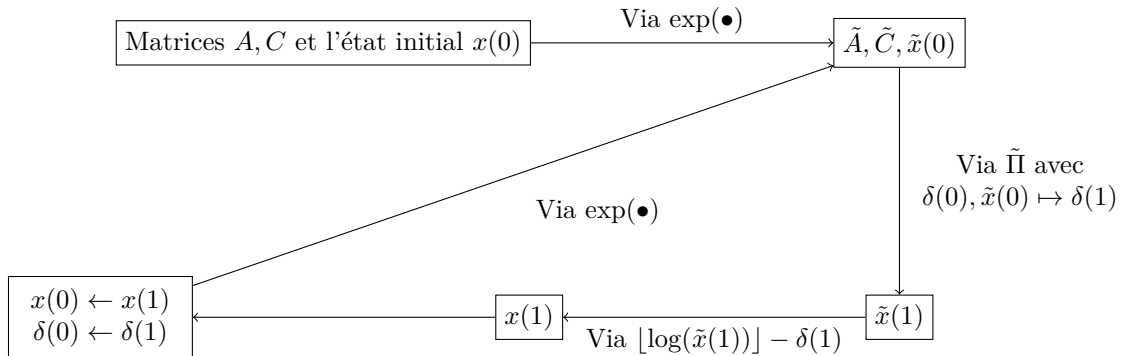


FIGURE 3 – Quantification et déquantification de Maslov pour l'étude des GET autonomes.

Le caractère récursif de la Figure Figure 3 est le suivant : $x(1)$ est calculé à partir de $x(0)$, puis $x(1)$ devient la nouvelle valeur de référence utilisée pour déterminer l'état suivant $x(2)$. La notation utilisée pour exprimer ce principe est : $x(0) \leftarrow x(1)$.

Bien que théoriquement correcte, en pratique, une condition suffisante pour que la représentation en temps discret des SED fonctionne est que tous les éléments soient finis. Il est toutefois possible d'obtenir un fonctionnement correct avec des éléments infinis sous certaines conditions. Considérons l'exemple suivant.

Exemple 6. Le GET suivant, représenté dans la Figure 4 présente une accumulation de jetons entre les transitions x_1 et x_2 si x_1 injecte des jetons dans cette place plus rapidement que x_2 ne peut les consommer, de sorte que $x_1(k) \ll x_2(k)$ est susceptible de se produire à partir d'un certain k . Cela rend la quantification/déquantification de Maslov numériquement instable. Ainsi, le facteur d'échelle $\delta(k)$ ne permet pas d'éviter un dépassement numérique dans la chaîne de calcul illustrée par la Figure 3.

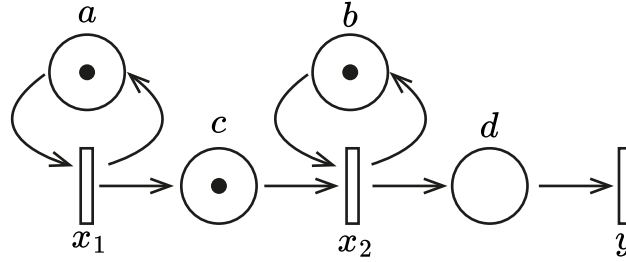


FIGURE 4 – Un GET autonome avec accumulation de jetons entre les transitions x_1 et x_2

Remarque 3. La stabilisation par retour d'état [10, 9, 11] constitue un outil intéressant pour traiter le problème de l'explosion de l'accumulation des jetons, lequel est étroitement lié à la notion de bornitude dans les réseaux de Petri. Ainsi, dans ce travail, nous considérons que tous les GET peuvent être contrôlés de manière à satisfaire les conditions nécessaires à l'évitement de dépassement numérique dans le processus de quantification/déquantification de Maslov.

4 Exemples d'applications

Dans cette Section, nous présenterons des exemples d'applications de modélisation et de simulation de GET en utilisant un cadre de dynamique classique.

4.1 Modélisation et forme canonique

Tout d'abord, considérons le GET de la Figure 5. Ce GET représente un système de production composé de deux machines avec un assemblage final.

Le comportement dynamique de ce GET peut être décrit (Section 3) par la représentation d'état qui suit :

$$x(k) = A_0 \boxtimes x(k) \boxplus A_1 \boxtimes x(k-1) \boxplus B_0 \boxtimes u(k), \quad (6)$$

avec $A_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$ et $B_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 10 \end{pmatrix}$.

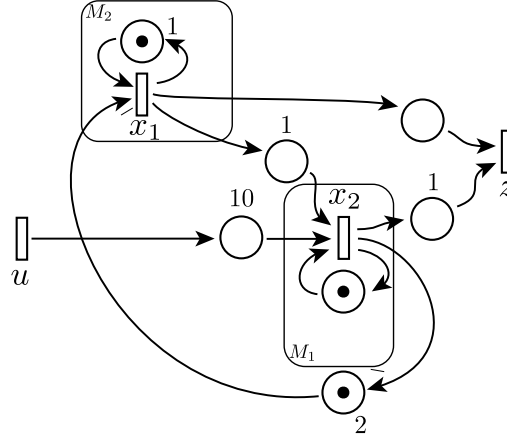


FIGURE 5 – GET de l'exemple d'application.

L'équation d'observation de ce système est donnée ci-dessous :

$$z(k) = C \boxtimes x(k), \quad (7)$$

avec $C = (0 \ 1)$. On suppose que l'état initial du système est connu et donné par $x(0) = (0, 0)^T$.

Tout d'abord, le système de l'équation (6) doit être réécrit à l'aide de l'équation (3) :

$$x(k) = A \boxtimes x(k-1) \boxplus B \boxtimes u(k) \quad (8)$$

avec $A = A_0^* \boxtimes A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = A_0^* \boxtimes B_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 10 \end{pmatrix}$.

Cela peut être obtenu par le système de l'équation (5) non-autonome :

$$\tilde{x}(k) = \tilde{A}_0 \times \tilde{x}(k) + \tilde{A}_1 \times \tilde{x}(k-1) + \tilde{B}_0 \times \tilde{u}(k), \quad (9)$$

avec $\tilde{A}_0 = \exp(A_0)$, $\tilde{A}_1 = \exp(A_1)$, $\tilde{B}_0 = \exp(B_0)$, $\tilde{C} = \exp(C)$, $\tilde{x}(0) = \exp(x(0))$ avec A, B, C et $x(0)$ relatifs au système de l'équation (6).

On a $\tilde{x}(k) = \tilde{A}_0 \times \tilde{x}(k) + \tilde{b}$ avec $\tilde{b} = \tilde{A}_1 \times \tilde{x}(k-1) + \tilde{B}_0 \times \tilde{u}(k)$ et une solution existe : en algèbre classique, on a

$$x = a \times x + b \iff x = (1 - a)^{-1} \times b,$$

avec le développement en série de Taylor (ou série de MacLaurin) suivant :

$$(1 - a)^{-1} \approx 1 + a + a^2 + a^3 + \dots$$

Ce principe s'applique au cas matriciel⁴ et donc

$$\tilde{x}(k) = (I - \tilde{A}_0)^{-1} \times \tilde{A}_1 \times \tilde{x}(k-1) + (I - \tilde{A}_0)^{-1} \times \tilde{B}_0 \times \tilde{u}(k), \text{ si } \forall \lambda \in \text{spec}(A_0), |\lambda| < 1. \quad (10)$$

A la fin, on vérifie que $A = \lfloor \log((I - \tilde{A}_0)^{-1} \times \tilde{A}_1) \rfloor$ et $B = \lfloor \log((I - \tilde{A}_0)^{-1} \times \tilde{B}_0) \rfloor$.

4. La somme régularisée $I + A + A^2 + \dots + A^k$ coïncide avec l'opération de fermeture $A^* = (I - A)^{-1}$ si les valeurs propres de A sont à l'intérieur du cercle unitaire.

4.2 Simulation

L'Algorithme 1 ci-dessous présente la simulation du système Π de l'équation (4) ainsi que celle de son équivalent en temps discret $\tilde{\Pi}$ défini par (5) qui est renvoyé à \mathbb{S}_0 , la copie de \mathbb{R}_{\max} .

Algorithm 1 Simulation d'un GET autonome en utilisant un cadre de dynamique classique

```

Input :  $A \in \mathbb{S}_0^{n \times n}, C \in \mathbb{S}_0^{p \times n}, N > 0$ 
Output :  $X_{\text{mp}}, X_{\text{dt}}, Z_{\text{mp}}, Z_{\text{dt}}$ 
 $n \leftarrow \text{size}(A), p \leftarrow \text{size}(C)$ 
 $\mathbf{eA} \leftarrow \exp(A), \mathbf{eC} \leftarrow \exp(C)$ 
/* Système  $\Pi$  (Equation (4)) */
 $X_{\text{mp}} \leftarrow \text{zeros}(n \times N), Z_{\text{mp}} \leftarrow \text{zeros}(p \times N)$ 
/* Système  $\tilde{\Pi}$  (Equation (5)) */
 $X_{\text{dt}} \leftarrow \text{zeros}(n \times N), Z_{\text{dt}} \leftarrow \text{zeros}(p \times N)$ 
/* Initial value  $x(0)$  */
 $X_{\text{mp}}(:, 0) \leftarrow \text{zeros}(n \times 1), X_{\text{dt}}(:, 0) \leftarrow \text{zeros}(n \times 1)$ 
/* Facteur d'échelle  $\delta(k)$  */
 $D \leftarrow \text{zeros}(1 \times N)$ 
for  $k \leftarrow 1$  to  $N$  do
    /* Système  $\Pi$  */
     $X_{\text{mp}}(:, k) \leftarrow A \boxtimes X_{\text{mp}}(:, k-1)$ 
     $Z_{\text{mp}}(:, k) \leftarrow C \boxtimes X_{\text{mp}}(:, k)$ 
    /* Mise à jour du facteur d'échelle */
     $D(:, k) \leftarrow -\max_{i=1}^n (X_{\text{dt}}(i, k-1))$ 
    /* Système  $\tilde{\Pi}$  vers Système  $\Pi$  */
     $X_{\text{dt}}(:, k) \leftarrow \lfloor \log(\mathbf{eA} \times \exp(X_{\text{dt}}(:, k-1) + D(:, k))) - D(:, k) \rfloor$ 
     $Y_{\text{dt}}(:, k) \leftarrow \lfloor \log(\mathbf{eC} \times \exp(X_{\text{dt}}(:, k) + D(:, k))) - D(:, k) \rfloor$ 
end

```

Exemple 7. Considérons le système Π de l'équation (4) où

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},$$

$C = E$ (matrice identité) et $x(0) = (0, 0)^\top$. En appliquant l'algorithme 1, on obtient, jusqu'à l'occurrence de 100 événements, une erreur absolue moyenne entre les simulations obtenues par le système Π de l'équation (4) et son équivalent $\tilde{\Pi}$ de l'équation (5) de : $\text{erreur}(x) = 0.0$ et $\text{erreur}(z) = 0.0$. Le stock (le nombre de jetons de la place située entre x_1 et x_2) reste toujours compris entre 0 et 1.

Exemple 8. Considérons le système Π de l'équation (4) où

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -\infty \\ 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$C = E$ (matrice identité) et $x(0) = (0, 0)^\top$. En appliquant l'algorithme 1, on obtient, jusqu'à l'occurrence de 1000 événements, une erreur absolue moyenne entre les simulations obtenues par le système Π de l'équation (4) et son équivalent $\tilde{\Pi}$ de l'équation (5) de : $\text{erreur}(x) = +\infty$, car à l'événement $k = 739$, le processus de quantification cesse de fonctionner à cause d'un

débordement de tampon, et $\text{erreur}(z) = 0.0$. Le stock (le nombre de jetons de la place entre x_1 et x_2) augmente avec le temps (même s'il diminue lorsque x_2 est franchie, x_1 est tirée plus fréquemment, ce qui entraîne une accumulation de jetons à cette place). Ce système doit être mis en boucle fermée afin de pouvoir être simulé (voir la Remarque 3).

5 Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté la représentation des SED avec délais et synchronisation (représentés graphiquement par des GET) dans l'espace exponentiel, en utilisant les opérations standards sur l'ensemble des réels non négatifs à travers une **déformation algébrique** appelée *déquantification de Maslov*. Cette transformation est très sensible aux dépassements numériques, et l'introduction d'un facteur d'échelle s'avère appropriée. Nous projetons également, à l'aide de la fonction `floor`, le logarithme de l'espace exponentiel sur l'ensemble des entiers, puis utilisons une injection pour poursuivre les calculs dans l'espace exponentiel lors des événements suivants (selon un principe de récurrence et afin de permettre la mise à jour du facteur d'échelle).

Comme perspectives, nous envisageons d'analyser, de commander/piloter, d'estimer, etc., ces systèmes à l'aide d'outils issus de l'automatique continue et discrète au fil du temps.

Références

- [1] Marianne Akian, Ravindra Bapat, and Stéphane Gaubert. Asymptotics of the Perron Eigenvalue and Eigenvector Using Max-Algebra. Research Report RR-3450, INRIA, 1998. Projet META2.
- [2] Marianne Akian, Ravindra Bapat, and Stéphane Gaubert. Non-archimedean valuations of eigenvalues of matrix polynomials. *Linear Algebra and its Applications*, 498 :592–627, June 2016.
- [3] Marianne Akian, Stéphane Gaubert, Julien Grand-Clément, and Jérémie Guillaud. The operator approach to entropy games. *Theory of Computing Systems*, 63 :1089–1130, 2019.
- [4] F. Baccelli, G. Cohen, G.J. Olsder, and J.P. Quadrat. *Synchronization and Linearity : An Algebra for Discrete Event Systems*. Wiley and Sons, 1992.
- [5] Jean-David Benamou, Guillaume Carlier, Marco Cuturi, Luca Nenna, and Gabriel Peyré. Iterative bregman projections for regularized transportation problems, 2014.
- [6] T.S. Blyth and M.F. Janowitz. *Residuation Theory*. Pergamon press, 1972.
- [7] C. G. Cassandras and S. Lafortune. *Introduction to Discrete Event Systems*. Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [8] Weiren Chou and Robert B. Griffiths. Ground states of one-dimensional systems using effective potentials. *Phys. Rev. B*, 34 :6219–6234, Nov 1986.
- [9] G. Cohen, Stéphane Gaubert, Ramine Nikoukhah, and J.P. Quadrat. Second order theory of min-linear systems and its application to discrete event systems. pages 1511 – 1516 vol.2, 01 1992.
- [10] C. Commault. Feedback stabilization of some event graph models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(10) :1419–1423, 1998.
- [11] Bertrand Cottenceau, Laurent Hardouin, and Jean-Louis Boimond. On timed event graph stabilization by output feedback in dioid. *IFAC Proceedings Volumes*, 34(13) :825–830, 2001. 1st IFAC Symposium on System Structure and Control 2001, Prague, Czechoslovakia, 27-31 August 2001.
- [12] Vinicius Mariano Gonçalves, Carlos Andrey Maia, and Laurent Hardouin. On max-plus linear dynamical system theory : The observation problem. *Automatica*, 107 :103–111, 2019.
- [13] L. Hardouin, C. A. Maia, B. Cottenceau, and M. Lhommeau. Observer design for (max,+) linear systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 55 - 2 :538 – 543, 2010.

- [14] B. Heidergott, G.J. Olsder, and J.W. van der Woude. Max Plus at Work : Modeling and Analysis of Synchronized Systems : a Course on Max-Plus Algebra and Its Applications. Number v. 13. Princeton University Press, 2006.
- [15] M. Lhommeau, L. Hardouin, J.-L. Ferrier, and I. Ouerghi. Interval analysis in dioid : Application to robust open-loop control for timed event graphs. In Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC '05. 44th IEEE Conference on, pages 7744–7749, 2005.
- [16] G. L. Litvinov. The maslov dequantization, idempotent and tropical mathematics : A brief introduction, 2005.
- [17] Grigori Litvinov, Viktor Maslov, and Andrei Sobolevskii. Idempotent mathematics and interval analysis, 2001.
- [18] M. D. Loreto, S. Gaubert, R. D. Katz, and J. Loiseau. Duality between invariant spaces for max-plus linear discrete event systems. SIAM J. on Control and Optimaztion, 2010.
- [19] C. A. Maia, L. Hardouin, R. Santos Mendes, and B. Cottenceau. Optimal Closed-Loop Control for Timed Event Graphs in Dioid. IEEE-TAC, 48(12) :2284–2287, 2003.
- [20] Gregorio Malajovich and Jorge P. Zubelli. Tangent graeffe iteration. Numerische Mathematik, 89(4) :749–782, October 2001.
- [21] T. Murata. Petri nets : Properties, analysis and applications. Proceedings of the IEEE, 77(4) :541–580, 1989.
- [22] I. Necoara, B. De Schutter, T.J.J. van den Boom, and H. Hellendoorn. Stable model predictive control for constrained max-plus-linear systems. Discrete Event Dynamic Systems : Theory and Applications, 17(3) :329–354, sep 2007.
- [23] I. Necoara, B. De Schutter, T.J.J. van den Boom, and H. Hellendoorn. Robust control of constrained max-plus-linear systems. Int. J. of Robust and Nonlinear Control, 19(2) :218–242, January 2009.
- [24] Oleg Viro. Dequantization of real algebraic geometry on logarithmic paper. In European Congress of Mathematics : Barcelona, July 10–14, 2000, Volume I, pages 135–146. Springer, 2001.